Algebra I, egzamin 1.02. 2023

Wszystkie rozwiązania powinny być dokładnie uzasadnione!

1. Niech G będzie grupą rzędu 175. Udowodnij, że:

   a) grupa G nie jest prosta,

   b) istnieje homomorfizm grupy G na grupę cykliczną C_5.

2. W pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$ rozważmy elementy $a = 3 + i$ oraz $b = 5 - i$. Niech I będzie ideałem głównym generowanym przez element a, a J ideałem głównym generowanym przez b.

   a) Wyznacz generatory ideałów $I + J$ i $I \cap J$.

   b) Czy któryś z pierścieni $\mathbb{Z}[i]/I$, $\mathbb{Z}[i]/(I + J)$ jest izomorficzny z ciałem $\mathbb{Z}_p$ dla pewnej liczby pierwszej p?

3. Które z następujących pierścieni są izomorficzne? Uzasadnij dokładnie każdą z odpowiedzi.

   a) $\mathbb{R}[x]/(x-1)^2\mathbb{R}[x]$,

   b) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\mathbb{R}[x]$,

   c) $\mathbb{R}[x]/(x^2+3)\mathbb{R}[x]$,

   d) $\mathbb{C}$.

4. a) Uzasadnij, że ideał $I = (x^3 + 3x^2 + 6)\,\mathbb{Z}[x]$ pierścienia $\mathbb{Z}[x]$ jest ideałem pierwszym ale nie jest ideałem maksymalnym.

   b) Które z powyższych własności ma ideał $J = (x^3 + 3x^2 + 6)\,\mathbb{Q}[x]$ pierścienia $\mathbb{Q}[x]$?

5. a) Udowodnij, że ideał $I = (y)$ w pierścieniu $R = \mathbb{Q}[x, y]$ jest zawarty w nieskończenie wielu ideałach maksymalnych.

   b) Niech I będzie ideałem w dziedzinie ideałów głównych R takim, że $I \neq R, I \neq \{0\}$. Udowodnij, że I jest zawarty w skończenie wielu ideałach maksymalnych.

Egzamin Algebra 1; Teoria

1. Niech H będzie podgrupą grupy G.

   a) Sformułuj twierdzenie Lagrange'a.

   b) Wykaż, że liczba warstw lewostronnych grupy G względem podgrupy H jest równa liczbie warstw prawostronnych (bez założenia o skończoności grupy G).

2. a) Podaj dwie różne (oczywiście równoważne) definicje rzędu $o(a)$ elementu a grupy G.

   b) Wykaż, że jeśli $a \in G$ ma rząd skończony oraz $\phi : G \longrightarrow H$ jest homomorfizmem grup, to $o(\phi(a))$ dzieli $o(a)$.

3. a) Podaj definicję elementu nierozkładalnego i definicję elementu pierwszego dziedziny R.

   b) Udowodnij, że jeżeli $p \in R$ jest elementem pierwszym, to p jest nierozkładalny w R.

4. a) Podaj definicję największego wspólnego dzielnika elementów a, b dziedziny R.

   b) Niech R będzie dziedziną ideałów głównych. Udowodnij, że $aR + bR = dR$, gdzie $d \sim \mathrm{NWD(a, b)}$.

5. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał oraz niech $a \in L$.

   a) Wyjaśnij co oznacza, że a jest elementem algebraicznym nad K. Podaj definicję wielomianu minimalnego elementu a nad ciałem K.

   b) Wyjaśnij, dlaczego $K[a] = K(a)$, jeśli a jest elementem algebraicznym nad K.

   Uwaga: $K[a]$ oznacza podpierścień w L generowany przez zbiór $K \cup \{a\}$, a $K(a)$ oznacza podciało w L generowane przez zbiór $K \cup \{a\}$.